26.10.

L je vlastní limita posloupnosti (an) pokud ∀ ϵ > 0 ∃ n0 ∀ n ≥ n0

**Věta** (jednoznačnost limity)

Limita posloupnosti je určena jednoznačně ( pokud existuje)

**DK** dokážeme, že posloupnost (an) nemůže mít 2 různé vlastní limity, *zbytek cvičení.*

Nechť L1 ≠ L2 jsou vlastní limity (an), BÚNO (bez újmy na obecnosti) L1 < L2

Zvolme ε Pak existuje n01 t.ž. ∀ ≥ n01 an ∈ (L1 – ε, L1 + ε)

Pro ∀ n ≥ max (n01, n02) máme an < L1 ≠ ε < L2 ≠ ε < an

**Věta** (limita monotónní posloupnosti)

Je-li (an) #C R neklesající a shora omezená, pak konverguje

Pozn.

Symetricky pro nerostoucí a zdola omezenou

Pokud je #P ≥ f. Monotónní a neomezená má nevlastní limitu

Stačí, že posloupnost je monotónní od nějakého n0 dál (posl. #(an)n=n0 do nekonecna jemonotoní)

**DK**

A = {an | n ∈ N} shora omezená množina tedy existuje a = sup A. Tedy an < a #provsechna n a navíc #provsechna ε > 0

∃ n0 : an0 > a – ε

Díky monotónnosti víme, že pro n ≥ n0 platí an0 ≥ an0 > a – ε

Tedy ∀ n ≥ n0 an ∈ (a-ε, a) tedy

**Definice** (bn) je posloupnost (posloupnost vybraná z) (an), pokud existuje pestře rostoucí zobrazení f:N->N taková, že bn = a. Jinými slovy existuje poslupnost přirozených čísel k1, k2, k3 ... taková, že bn = akn

Relace “být posloupnost”

Reflexivní, tranzitivní

Není slabě antisymetricka *(cvičení)*

**Věta** (o limitě podposloupnosti)

Je-li (an) podposloupnosti (bn) a (bn) má limitu, pak

*Dk. Cvičení*

Použití: Najdeme-li dvě podposloupnosti (an) s různými limitami, pak neexistuje

PŘ. An=(-1)n podposloupnosti bn = 1 -> --------\

Bn = -1 -> --------- an neexistuje

**Věta** (aritmetika limit)

Nechť (an),(bn) jsou konvergentní (!) poslupnosti s ,

Pak I) posloupnost (an + bn) konverguje a = a+b

II) posloupnost (an + bn) konverguje a = a\*b

III) pokud b ≠ 0 a bn ≠ 0 ∀n, = a/b

‘--[ stačí od nějakého n0 dál]

**DK**

I)dle △-nerovnosti máme |(an + bn) – (a+b)| < ε’ a |bn-b| < ε’

Tedy ∀n ≥ n0 |(an + bn)-(a+b)| < 2ε’, volíme ε’ = ε/2

II) |an\*bn| =’ |(an-a)bn + a(bn-b)| ≤ |an-a| |bn| + |a| |bn-b|

∀ 0 < ε’ < 1 ∃n0 ∀n≥ n0

Tedy |an\*bn – a\*b| < ε’ \* (|a| + |b| + 1) = ε

ε’ =

| - | = ≤

∀ 0<ε’ < |b|/2 ∃n0 ∀n≥n0  |an-a|<ε’, |bn-b|<ε’, |bn|>|b|\2

Tedy |an/bn| < (volím ε’ ≤ )

**Věta** (násobení limitní nulou)

Nechť (an) je omezená a (bn) konverguje k 0

Pak lim (an bn) = 0

Příklad

Víme, že = 0, = = 0

**Věta** (limita a uspořádání)

Nechť (an), (bn) mají vlastní limity *a* a *b*

I)Když a < b, tak ∃n0 ∀n≥n0 : an < bn

II)Když, pro nějaké n0 platí, že ∀n≥n0 je an < bn pak a≤ b

Pozn.

Platí, pro nevlastí limity (-∞ < a < ∞ ∀a ∈ R)

Nerovnosti v I) musí být ostré ve II) neostré

**Důkaz**

I)BÚNO a<b vezmeme 0 < ε ≤ (b-a)/3

∃n0 ∀n≥n0, an<a+ε < b-ε

II)Pro spor předpokládejme b < a z I), plyne, že ∃n0 ∀n≥n0 bn<an

**Věta** (o 2 policajtech)

Nechť (an), (bn) a (cn) splňují an=cn=a ∈R

∃n0 t.ž. ∀ n ≥ n0  an≤ bn ≤ an

Pak bn konverguje a bn = a

**Důkaz** pozorováním. Pokud a,e ∈I, Interval, pak ∀ d splňující c ≤ d ≤e => d∈I

Z předpokladu ∀ a>0 ∃n0 platí an,cn∈(a-ε, a+ε), tedy i bn∈(b-ε, b+ε)

2.11.

**Aritmetika nekonečna**

Definice

Rozšířená reálná osa R\* = R ∪ {-∞ , +∞ }

Kde porovnávání a aritmetické operace jsou definovány

∀ a ∈ R -∞ < a < ∞

∀ a ∈ R\* a ≠ ∞ : a+∞=∞ + a = ∞

∀ a ∈ R\* a ≠ ∞ : a-∞=-∞ + a = -∞

∀ a ∈ R\* a>0 : a\*(± ∞) = (± ∞)\*a = ± ∞

∀ a ∈ R\* a<0 : a(± ∞)= (±∞)\*a=±∞

∀ a ∈ R a/±∞ = 0

Neurčité výrazy:

+∞+(-∞ ),-∞+∞

0\*(±∞ ), (±∞ )\*0, ,

Věta (rozšířená aritmie limit)

(an)(bn) posloupnosti reálných čísel, R\*, R\*

I) je-li součet definován

II) je-li součin definován

III) ∀ bn ≠ 0, pak je-li podíl definován

Neskládat ±

Podíl

je rovna 1) ∞ 2) ∅ 3) -∞

Věta (o monotónní posloupnosti)

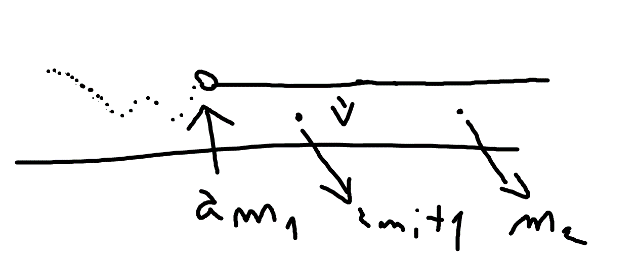
Každá posloupnost reálných čísel má monotónní podposloupnost

Důkaz:

Indexem k začíná dobrá podposloupnost pokud existují

K = k1<k2<k3 ... , t.ž. ak1 ≤ ak2 ≤ ... [nekonečná neklesající posloupnost]

Indexem k začíná špatná podposloupnost pokud existují k=k1<kě<k3 ... <kj, t.ž. ak1 ≤ ak2 ≤ akj, akj>an, n>kj

 [neklesající konečná podposloupnost, kterou nelze prodloužit]

Každé k je azačátkem dobré nebo špatné podposloupnosti

/index 1 je začátkem dobré posloupnosti

\není: definujeme m1 = poslední index špatné posloupnosti

/index m1+1 je začátkem dobré posposloupnosti

\není: m2=poslední, index špatné podposloupnosti začínající m1+1

am2<am1 atd...

/buď někdy najdeme dobrou podposloupnost

\zkonstrujeme nekonečnouklesající podposloupnost

M1 m2,m3 ... tž am1>am2>am3 ...

Existují posl. Které jsou

-Rostoucí, nemá lim ∞ 1-1/n

-Má limitu v ∞ ale není neklesající (ani od n0 dál) n/2 + (-1)^n

-Není shora omezena, ale nemá limitu ∞ (-n)^n

Věta (Bolzano Weirstrassova)

Každá omezená posloupnost má konvergentní podposloupnosti

Lze rozšířit na neomezené posloupnosti (mají podposloupnost s vlastní nebo nevlastní limitou)

Deklarace: Dle předchoz věty á takova posloupnost monotónní podposloupnost, která je rovněž omezená.

Dle věty o limitě monotónní posloupnosti tato podposloupnost konverguje

Důležitá definice

Posloupnost (an) je cauchyovská pokud ∀ ϵ > 0 ∃ n0 ∈ n,m > n0

< ϵ

Věta (Cauchyho podmínka)

Posloupnost (an) ⊂ ℝ je cauchyovská <=> je konvergentní (nejde rozšířit pro nevlastní limitu)

Neplatí v ℚ (protože nejsou úplná)

Důkaz “<= ” máme

Tedy ∀ ϵ >0 ∃ n0 ∈ N ∀ n > n0 : |an - a| < ϵ

Tudíž pro ∀ n,m>n0 : |an – am| ≤ |an - a| + |am-a|

Tedy (an) je cauchyvská

“=>” (an) cauchyovská

Pozorování: (an) je omezená

ϵ = 1 → ∃n0 : pro n=n0 + 1 platí ∀ m>n0 am ∈

horní závora max(a1,....,an0,)

spodní závora min(a1,....,an0,)

z B-W věty má (an) konvergentní podposloupnost (akn)

= a ∈ R

Víme ∀ ϵ >0 ∃ n0 ∀ n, m>m0

Z A – nerovnosti : |an - n| ≤ |an - akn| + |akn - a| < 2ϵ

Tedy

Definice

Nechť (an) je posloupnost reálných čísel, A ∈ R\*

Řekěme, že A je hromadný bod (an), pokud existuje poposloupnost (akn) taková, že akn=A

Z rozšířené B-W věty víme, že každá posloupnost má alespoň jeden hromadný bod

Značíme množinu hromadnných bodů H((an))

H((an)) = R\*

Pokud je H((an)) shora omezená, má maximum, pokud je zdola omezená má minimum

Definice

inf an = min H((an)) – limes inferor

sup an = max H((an)) – limes superor

Vždy existují (mohou být ± ∞ )

9.11.

Lim inf an = min (H(an)) a - ∞ pokud je neomezená zdola

Lim sup an = max (H(an)) a + ∞ pokud je neomezená zdola

---→ vždy existují

Tvrzení (ekvivalentní definice lim sup a lim inf)

Definujeme

Bn = sup {an, an+1 ... }

Cn = inf {an, an+1 ...}

Pak Bn je nerostoucí, Cn neklesající tedy vždycky mají limitu

Pokud nejsou definovány kvůli neomezenosti An dodefinujeme Bn = ∞ Cn = -∞

Lim Bn → ∞ Lim Cn → -∞

Po takto definované Bn a Cn platí Lim Bn = Lim sup An a Lim Cn = Lim inf An

Věta (Liminf a Limsup)

Limita (an) existuje <=> limsup an = liminf an = lim an

**Řady**

Definice: (nekonečná) řada: je-li an posloupnost

Symbol nazýváme řadou, an je-li n tým členem řady sk = =a1 + a2 ... ak

Součet řady je . Budeme psát = (pokud existuje)

Pokud Sk konverguje, říkáme že řada konverguje, jinak říkáme, že řada diverguje

Občas budeme psát jen ∑ an (případnou ,)

Řada -> má součet ->konverguje

| ->součet je +∞ nebo -∞

->nemá součet

Harmonická řada

>= k/zk + ½

K=2n sk >= 1+r/2 pro k 2r+1 do 2r+1

Věta (nutná podmínka konvergence)

Nechť řada ∑ an konverguje. Potom lim an = 0

Pozn. Opačná implikace neplatí (např ∑ 1/n)

Věta (Caudyova podmínka pro řady)

Řada ∑ an je konvergentní <=> ∀ ϵ >0 ∃ n0∈ ℕ ∀ n,m>0m >= n

<ϵ

Věta (lineární kombinace řad)

Nechť ∑ an ∑ bn mají součet pak

I) pro α ∈ ℝ takové, že α \* je definovaný výraz, pak

II) je-li +definovaný výraz, pak = +

Věta (srovnávací kritérium)

Nechť an,bn ≥ 0 ∀ n ∈ ℕ

I)pokud ∃ n0 ∈ ℕ ∀ n > n0 : an ≤ bn a ∑ Bn konverguje pak ∑ an konverguje

I) nechť lim an/bn = L ∈ ℝ\* pak

a) pokud 0<L<∞ ∑ an K <=> ∑ bn K

b) pokud L=0 ∑ bn K => ∑ an K

c) pokud L=∞ ∑ an K => ∑ bn K

16.11.

Věta (srovnávací kritéria)

Nechť an,bn≥0 ∀ n ∈ ℕ

I) Pokud ∃ n0 ∀ n>n0 : an ≤ bn a ∑ bn konverguje, ∑ ankonverguje

II) Nechť =l ∈ ℝ\* pak

a)pokud l ∈ (0,∞) ∑ an K <=> ∑ bn K

b)pokud l = 0 ∑ bn K => ∑ an K

c)pokud l = +∞ ∑ an K => ∑ bn K

Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium) nebo jenom ( odmocninové kritérium )

Nechť an ≥ 0 ∀ n ∈ ℕ

I) Pokud existuje *q* ∈ (0,1) a n0 ∈ ℕ ∀ n≥ n0 aNn<*q* => ∑ an K

II) Pokud an1/n < 1 => ∑ an K

III) Pokud an1/n < 1 => ∑ an K

IV) Pokud an1/n > 1 => ∑ an D

V) Pokud an1/n > 1 => ∑ an D

Věta (d’Alenbertovo podílové kritérium)

Nechť an ≥ 0 ∀n ∈ ℕ

I) Pokud existuje *q* ∈ (0,1) a n0 ∈ ℕ ∀ n≥ n0

II)Pokud lim sup < 1 => ∑ an K

III)Pokud lim < 1 => ∑ an K

IV)Existuje posloupnost bn taková, že lim sup > 1 a ∑ bn K

V)Pokud lim sup > 1 => ∑ an D

Věta (Leihnizovo kritérium)

Nechť posloupnost an je nerostoucí a lim n =0 pak ∑ (-1)n+1 an K

Věta (AK => K)

Pokud ∑ an konverguje absolutně, pak konverguje

Věta (Dirichletovo a Abelovo kritérium)

Nechť an bn jsou posloupnosti, an, nerostoucí a nezáporná

30.11.

Věta (Leibnizovo kritérium)

Nechť (an) nerostoucí posl.

Lim an = 0 Pak ∑ (-1)n+1 an K

Věta (Cauchyho kondenzační kritérium)

Když a1≥ a2≥...≥ 0, pak řada ∑ 2n a2n K <=>∑ an K

Důsledek:

Řada ∑ 1/nα K <=> α > 1

Věta (Riemanova o přerovnání řad)

Nechť ∑ an konverguje, ale ne absolutně. Pak α ∈ R\* existuje

P : ℕ -> bijekce taková, že ∑ ap(n) = α

Věta (přerovnáí řad)

Nechť ∑ an AK. Pak pro ∀ bijekce p:ℕ ->ℕ je ∑ ap(n) AK

A součty se rovnají

Užitečný důsledek

Lze definovat i řady pro lib. Společnou množinu X

Řekněme, že , AK pokud ∃ c>0:∀ A⊆ X konečnou

{(i,a)|i∈X,a∈ℝ } <- *funkce*

7.12.

Exponenciální funkce

X ∈ ℝ ex = exp(x)=∑ =

Konverguje z podílového kritéria

=

Pozorování: e^0 = 1

Tvrzení vlastnost exponenciály

∀ x,y ∈ ℝ

Exp(x+y)=exp(x) exp(y)

Tvrzení existence logaritmu

∀ y ∈ ℝ+ má rovnice ex = y právě jedno řešení xy = logx y

Tvrzení exponenciála jako limita

∀ y ∈ ℝ platí

lim (1+x/n)=e^x

pozorování: #(n nad k) = (n(n-1)...(n-(k+1)))/(k!)

Definice geometrické fa

x∈ ℝ …

Definice ω > 0 , a ∈ ℝ

Definice limita funkce v bodě

mám f:M→R, kde M<C, a ∈ R\* je hromadný bod M. A←R pak lim(x→n)f(x)=a<=> ∀ ≤ > 0 ∃ ω > 0